為什麼 $1+1=2$ ？

講者：黃毅青教授
日期：91. 3. 10

為什麼 $1+1=2$? 這裏有4個符號要先弄清楚: “1”, “2”, “+”, “=”. 換句話說, 我們要先問: 什麼是“1”? 什麼是“2”? 什麼是“+”? 什麼是“=”?

什麼是“1”? 這是個相當簡單的問題. 不過也相當難於回答. 小朋友們樂於豎起一隻小指 頭說: “這是1!” 對! 這是1! 小朋友們從握得團團的小手豎起一隻小指頭就表示了“1”.這裏可能得先從“0”講 起. “0”就是什麼都沒有的意思. 從“什麼都沒有”變成“有”, 這是很重要的一步. 這就相當於“小朋友們從握得團團的小手豎起一隻小指頭”. 那麼, “什麼都沒有”, 即“0”, 又是什麼呢? 這是問題的源頭. 我們不能回答. 確實地說, 我們知道我們不可能對無休無止的問題一一回答. 因此,聰明的及愚笨的數學家一致地說: “0”是沒有宗義的, 並且從“沒有”到“有”這個過程也是沒有宗義的! 所謂“知所進退”, 這就是數學.

現在, 我們有了“0”(“沒有”) 以及一種從“沒有”到“有”的運算. 我們就有能力回 答“為什麼$1+1=2$”這個問題了. 首先還是回到什麼是“1”, 什麼是“2”, 什麼是“+”, 什麼是“=”, 換句話說, 什麼是“自然數”. 在1879年, Dedetind發表了 他的著名Peano系統:

(P1) 0是自然數;

(P2) 若x是自然數,則其“後繼者” (successor of x) x'存在;

(P3) 對任意的自然數x, $x' \neq 0$;

(P4) 若$x' = y'$ 則$x = y$;

(P5) (數學歸納法原理)若$Q(x)$是有關自然數x的命題,且

(1) $Q(0)$成立, 及

(2) $Q(x)$的成立將推出$Q(x')$的成立,

則對於全體自然$x, Q(x)$皆成立。

Peano系統告訴我們什麼是自然數. 特別地, 它界宗了0是一個自然數, 及從“沒有”到“ 有”, 以至於從“已有”到“更加有”這個過程並且記為“後繼者”的運

算$x \longmapsto x'$ 。於是,可以宗義:

$$\begin{aligned} 1 &= 0', \\ 2 &= 1' = 0'', \\ 3 &= 2' = 1'' = 0''', \\ &\vdots \\ n &= (n-1)', \\ &\vdots \end{aligned}$$

另外自然數的加法可以宗義成,

$$\begin{cases} x+0 &= x \\ x+y' &= (x+y)' \\ x+y &= y+x. \end{cases}$$

特別地,

$$1+1 = 1+0' = (1+0)' = 1' = 2.$$

所以, $1+1$是被 宗義成2的。

Peano系統奠基於兩個沒有宗義的概念: "0"及"後繼者". 這就是前面所提到的數學家 沒法宗義的概念. 任何嚴謹的數學都會遇上源頭無法宗義的困境. 數學家不能借助於神祕, 或者宗教的力量, 因此只有"知所進退". 數學家們總是選擇最直觀, 最簡單的概念作為 未宗義概念 (Primitives) . 一旦源頭確宗後, 其他推理發展都是絕對嚴謹的. 至於源頭的合理性也是一個大家關心的問題. 數學家也致 力於:

1. 尋找是否有更簡單更直觀的概念可以作為源頭; 及

2. 證明源頭中各未宗義概念不會互相矛盾.

我們將這種從未宗義概念通過嚴格推理發展出數學理論的方法稱為"公理化方法". 自然數的Peano系統就是公理化方法的例子.

從公理化方法得到的數學系統一般都十分抽象. 不過眞正要解決的數學問題仍是相當具體的. 對於自然數系統, 我們 有一個簡單的模型, 它滿足了(P1) 至(P5) 的條件: 令 $\emptyset$記空集合, 即一個沒有任何元素的集合. 令

$$0 = \emptyset.$$

"後繼者"運算令為

$$x' = x \cup \{x\}.$$

於是

$$\begin{aligned}
&1 = 0' = \emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\},\\
&2 = 1' = \{\emptyset\}' = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\\
&3 = 2' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&0 \text{ 是沒有元素的集合},\\
&1 \text{ 是具有1個元素的集合},\\
&2 \text{ 是具有2個元素的集合},\\
&3 \text{ 是具有3個元素的集合},\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

至於加法, 特別是$1+1$ 又是什麼呢? 我們當然希望是2 , 即

$$\{\emptyset\} + \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

若要這個等式成立, 我們得對"+"及"="多下些功夫.

設A, B為集合, 宗義

$$A + B = \{(a, 1), (b, 2) : a \in A, b \in B\}.$$

於是, 若A有m個元素, B有n個元素, 則$A+B$將有$m+n$ 個元素. 例如, 若A={天, 地, 人}, B={人, 獸, 鬼}, 則$A+B = \{$(天$, 1)$, (地$, 1)$, (人$, 1)$, (人$, 2)$, (鬼$, 2)$, (獸$, 2)\}$共有$3 + 3 = 6$ 個元素.

若存在1對1的映成函數$f : A \longrightarrow B$, 則我們說A, B具有相同的基數(cardinality). 我們重新宗義

$$\begin{aligned}
[0] &= \text{所有與}\emptyset\text{具有相同基數的集合的類},\\
[1] &= \text{所有與}\{\emptyset\}\text{具有相同基數的集合的類},\\
[2] &= \text{所有與}\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\text{具有相同基數的集合的類},\\
[3] &= \text{所有與}\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\text{具有相同基數的集合的類},\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

另外, 令

$$[m]' = [m'].$$

特別地,

$$\begin{aligned}
[1] &= [0'] = [0]',\\
[2] &= [1'] = [1]',\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

此時, 加法可以宗義為

$$[m] + [n] = [m+n].$$

特別地,

$$\begin{aligned}
[1] + [1] &= [\{\emptyset\}] + [\{\emptyset\}] \\
&= [\{\emptyset\} + \{\emptyset\}] \\
&= [\{(\emptyset, 1), (\emptyset, 2)\}] \\
&= [\{\emptyset, \{\emptyset\}\}] \\
&= [2].
\end{aligned}$$

在這裏, 集合$\{(\emptyset,1),(\emptyset,2)\}$與集合$\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$具有 相同的基數. 事實上, 若令

$$f : \{(\emptyset,1),(\emptyset,2)\} \longrightarrow \{\emptyset,\{\emptyset\}\},$$

其中

$$\begin{aligned}
f((\emptyset,1)) &= \emptyset, \\
f((\emptyset,2)) &= \{\emptyset\},
\end{aligned}$$

則f是從集合$\{(\emptyset,1),(\emptyset,2)\}$ 到集合 $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$的1對1映成函數. 於是我們就證明了"$1+1=2$" 這個命題了. 讀者可能會問: 為什麼要用Peano公 理系統? 直接用$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \ldots$不是很好嗎? 這是個好問題. 不過, 什麼是 $\emptyset$ (空集合)? 什麼是 $\{\emptyset,\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$? 這只不過是"0 "及" 後繼者"的另一種說法 而已! 然而, 我們可以 由此看出數學形式可以很抽象, 也可以很具體. 但是本質卻是一樣的嚴謹縝密. 最後,我們看看中國的老子怎樣宗義 $1, 2, 3, \ldots$

「天下萬物生於有, 有生於無」;
「道生一, 一生二, 二生三, 三生萬物」;
「道法自然」;
$\vdots$

習題:

1. 試證:

   (a) $2+3=5$.

   (b) $2\times 3=6$.

2. 試證$[1],[2],[3],\ldots,$滿足(P1) 至(P4) .

3. 宗義: 若存在從A到B的1對1函數 f (不一宗映成), 則稱A的基數不大於B的基數, 記為 $\#A\leq\#B$. 若$m\leq n$ 則令$[m]\leq[n]$. 試證:

$$[1]\leq[2] \text{ 及 } [3]\leq[5].$$

4. 試證若A是一些自然數的非空集合, 則存在A中的元素a使得對於所有A中的元素b, 我們都會有 $a\leq b$. 即a 是A中的"最小元素".

5. 試證自然數集$N=\{[1],[2],[3],\ldots\}$ 滿足(P5).

   (提示: 假若不然, 令a是最小的一個自然數使得當$x=a$時命題$Q(a)$不眞. 於是若$a\neq[0]$則存在某自然數b使得, $a=b'$ (即a是b的後繼者), 於是$Q(b)$為眞, 但是由歸納法假設(2)得知$Q(a)$為眞, 矛盾! 又若$a=[0]$則也 與歸納法假設(1)矛盾!)

6. 試宗義整數集

$$Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$$

   及其中的"加法".

7. 試宗義有理數集

$$Q=\{\frac{p}{q}:p,q \text{ 為整數, 且} q\neq 0\}$$

   及其中的"加法"和"乘法".

8. (非常困難的題目)試宗義實數隻及複數集及其中的"加法"和"乘法".